Mathematische Spielereien

Volker Grabsch

20. September 2012

Übersicht

Übersicht

Interpretation des Hexeneinmaleins

Du mußt verstehn!
Aus Eins mach' Zehn,
Und Zwey laß gehn,
Und Drey mach' gleich,
So bist du reich.

Verlier' die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex',
Mach' Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:

Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmal-Eins!

Interpretation des Hexeneinmaleins

Du mußt verstehn!
Aus Eins mach' Zehn,
Und Zwey laß gehn,
Und Drey mach' gleich,
So bist du reich.

Verlier' die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex',
Mach' Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:

Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmal-Eins!

Interpretation des Hexeneinmaleins

10	2	3
0	7	8
5	6	4

Du mußt verstehn!
Aus Eins mach' Zehn,
Und Zwey laß gehn,
Und Drey mach' gleich,
So bist du reich.

Verlier' die Vier!
Aus Fünf und Sechs,
So sagt die Hex',
Mach' Sieben und Acht,
So ist's vollbracht:

Und Neun ist Eins,
Und Zehn ist keins.
Das ist das Hexen-Einmal-Eins!

Magische Quadrate

Lo-Shu (China, 6500 Jahre alt):

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Magische Quadrate

Chautisa Yantra (Indien, 1000 Jahre alt):

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Übersicht

Grundlagen Unendlichkeit

- „Paradoxon" von Galilei
  - $\{n^2\}$ ist genauso groß wie $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} & = \{1, 2, 3, 4, \;\; 5, \;\; 6, \;\; 7, \;\; 8, \;\; 9, \;\; 10, \;\; \ldots\} \\ \{n^2\} & = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots\} \end{array}$$

  - $\{n^2\}$ ist echte Teilmenge von $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} & = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\} \\ \{n^2\} & = \{1, \qquad 4, \qquad\qquad\quad 9, \qquad \ldots\} \end{array}$$

- Definition:
  ∞ = Man kann etwas wegnehmen, ohne dass es kleiner wird.

Grundlagen Unendlichkeit

- „Paradoxon“ von Galilei
  - $\{n^2\}$ ist genauso groß wie $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} & = \{1, 2, 3, 4, \; 5, \; 6, \; 7, \; 8, \; 9, \; 10, \; \ldots\} \\ \{n^2\} & = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots\} \end{array}$$

  - $\{n^2\}$ ist echte Teilmenge von $\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N} & = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\} \\ \{n^2\} & = \{1, \quad 4, \quad 9, \quad \ldots\} \end{array}$$

- Definition:
  ∞ = Man kann etwas wegnehmen, ohne dass es kleiner wird.

Grundlagen Unendlichkeit

- „Paradoxon" von Galilei
  - $\{n^2\}$ ist genauso groß wie $\mathbb{N}$:

    $$\begin{array}{ll} \mathbb{N} & = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ 5,\ \ 6,\ \ 7,\ \ 8,\ \ 9,\ \ 10,\ \ \ldots\} \\ \{n^2\} & = \{1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ \ldots\} \end{array}$$

  - $\{n^2\}$ ist echte Teilmenge von $\mathbb{N}$:

    $$\begin{array}{ll} \mathbb{N} & = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots\} \\ \{n^2\} & = \{1,\ \quad\quad 4,\ \quad\quad\quad\quad 9,\ \quad\quad \ldots\} \end{array}$$

- Definition:
  $\infty =$ Man kann etwas wegnehmen, ohne dass es kleiner wird.

Grundlagen Unendlichkeit

- „Paradoxon“ von Galilei
    - $\{n^2\}$ ist genauso groß wie $\mathbb{N}$:

      $$\begin{array}{lll} \mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\} \\ \{n^2\} & = & \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, \ldots\} \end{array}$$

    - $\{n^2\}$ ist echte Teilmenge von $\mathbb{N}$:

      $$\begin{array}{lll} \mathbb{N} & = & \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\} \\ \{n^2\} & = & \{1, \quad 4, \quad 9, \quad \ldots\} \end{array}$$

- Definition:
  $\infty =$ Man kann etwas wegnehmen, ohne dass es kleiner wird.

Mengen

- $\mathbb{N}$ – kleinste unendlich große Menge
- „abzählbar“ – höchstens so groß wie $\mathbb{N}$
  - $\emptyset$, $\{1,2,3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$
  - Teilmengen abzählbarer Mengen
  - (endliche) Vereinigung abzählbarer Mengen
  - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
- „überabzählbar“ – größer als $\mathbb{N}$
  - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^n$, $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, $[0,1]$

Mengen

- $\mathbb{N}$ – kleinste unendlich große Menge
- „abzählbar“ – höchstens so groß wie $\mathbb{N}$
    - $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$
    - Teilmengen abzählbarer Mengen
    - (endliche) Vereinigung abzählbarer Mengen
    - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
- „überabzählbar“ – größer als $\mathbb{N}$
    - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $[0, 1]$

Mengen

- $\mathbb{N}$ – kleinste unendlich große Menge
- „abzählbar“ – höchstens so groß wie $\mathbb{N}$
    - $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$
    - Teilmengen abzählbarer Mengen
    - (endliche) Vereinigung abzählbarer Mengen
    - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
- „überabzählbar“ – größer als $\mathbb{N}$
    - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{N}^\mathbb{N}$, …

Mengen

- $\mathbb{N}$ – kleinste unendlich große Menge
- „abzählbar“ – höchstens so groß wie $\mathbb{N}$
    - $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$
    - Teilmengen abzählbarer Mengen
    - (endliche) Vereinigung abzählbarer Mengen
    - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
- „überabzählbar“ – größer als $\mathbb{N}$

Mengen

- $\mathbb{N}$ – kleinste unendlich große Menge
- „abzählbar“ – höchstens so groß wie $\mathbb{N}$
    - $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$
    - Teilmengen abzählbarer Mengen
    - (endliche) Vereinigung abzählbarer Mengen
    - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
- „überabzählbar“ – größer als $\mathbb{N}$
    - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

Mengen

- $\mathbb{N}$ – kleinste unendlich große Menge
- „abzählbar“ – höchstens so groß wie $\mathbb{N}$
    - $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$
    - Teilmengen abzählbarer Mengen
    - (endliche) Vereinigung abzählbarer Mengen
    - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
- „überabzählbar“ – größer als $\mathbb{N}$
    - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $[0, 1]$

Mengen

- $\mathbb{N}$ – kleinste unendlich große Menge
- „abzählbar" – höchstens so groß wie $\mathbb{N}$
  - $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$
  - Teilmengen abzählbarer Mengen
  - (endliche) Vereinigung abzählbarer Mengen
  - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
- „überabzählbar" – größer als $\mathbb{N}$
  - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $[0, 1]$

Mengen

- $\mathbb{N}$ – kleinste unendlich große Menge
- „abzählbar" – höchstens so groß wie $\mathbb{N}$
  - $\emptyset$, $\{1, 2, 3\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^2$
  - Teilmengen abzählbarer Mengen
  - (endliche) Vereinigung abzählbarer Mengen
  - abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen
- „überabzählbar" – größer als $\mathbb{N}$
  - $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, $[0, 1]$

Folgen und Reihen

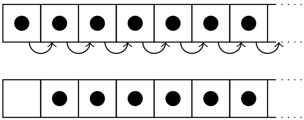
$$
\begin{aligned}
s &= 1 - 1 + 1 - 1 \pm \cdots \\
&\stackrel{?}{=} (1-1) + (1-1) + \cdots \\
&\stackrel{?}{=} 1 + (-1+1) + (-1+1) + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} \pm \cdots \\
&\stackrel{?}{=} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

Übersicht

Schwund bei Verschiebung

- Hilberts Hotel



- Strahlen

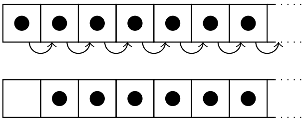
$[0, \infty)$

$[1, \infty)$

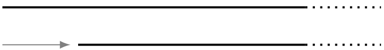
- Schwund bei Drehung?

Schwund bei Verschiebung

- Hilberts Hotel



- Strahlen



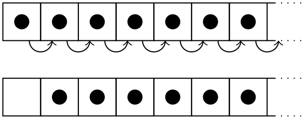
$[0, \infty)$

$[1, \infty)$

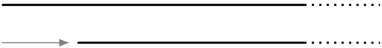
- Schwund bei Drehung?

Schwund bei Verschiebung

- Hilberts Hotel



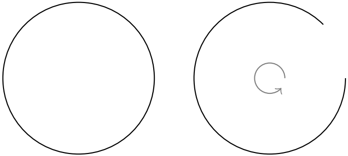
- Strahlen



$[0, \infty)$

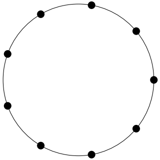
$[1, \infty)$

- Schwund bei Drehung?



Rotations-Mengen

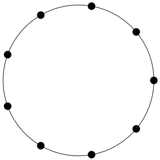
- Stammbruch-Drehwinkel – $D\left(0, \frac{1}{9}\right)$



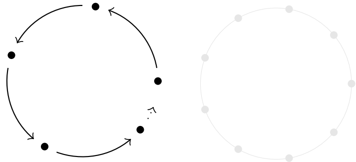
- rationaler Drehwinkel – $D\left(0, \frac{2}{9}\right)$

Rotations-Mengen

- Stammbruch-Drehwinkel – $D\left(0, \frac{1}{9}\right)$

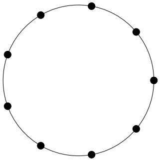


- rationaler Drehwinkel – $D\left(0, \frac{2}{9}\right)$

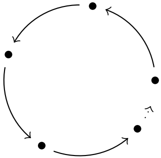


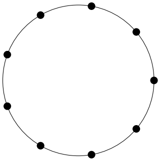
Rotations-Mengen

- Stammbruch-Drehwinkel – $D\left(0, \frac{1}{9}\right)$



- rationaler Drehwinkel – $D\left(0, \frac{2}{9}\right)$





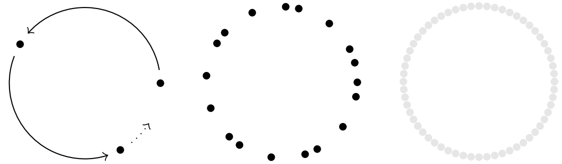
Schwund bei Drehung

- irrationaler Drehwinkel – $D\left(0, \sqrt{2}\right)$

- Drehung

Schwund bei Drehung

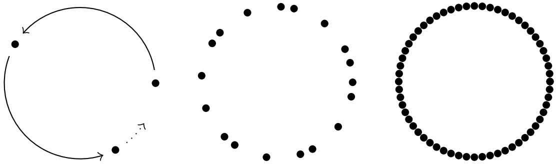
- irrationaler Drehwinkel – $D\left(0, \sqrt{2}\right)$



- Drehung

Schwund bei Drehung

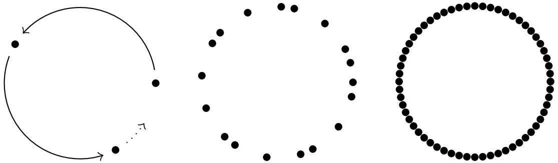
- irrationaler Drehwinkel – $D\left(0, \sqrt{2}\right)$



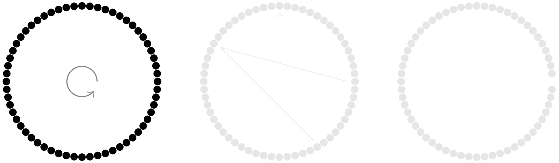
- Drehung

Schwund bei Drehung

- irrationaler Drehwinkel – $D\left(0, \sqrt{2}\right)$

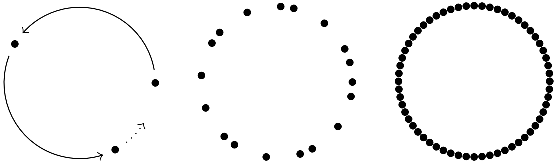


- Drehung

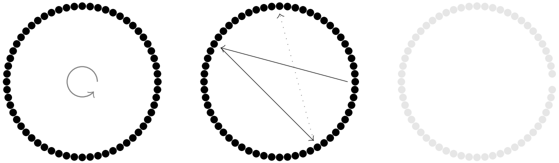


Schwund bei Drehung

- irrationaler Drehwinkel – $D\left(0, \sqrt{2}\right)$

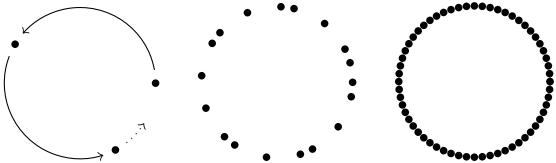


- Drehung

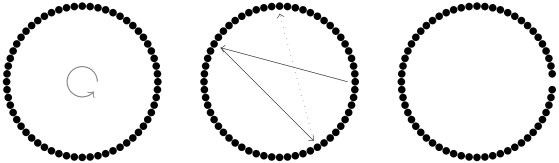


Schwund bei Drehung

- irrationaler Drehwinkel – $D\left(0, \sqrt{2}\right)$

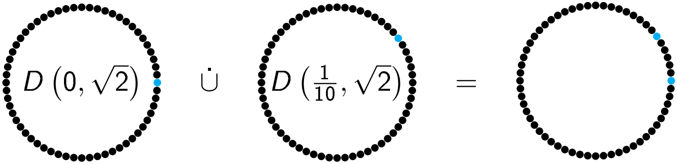


- Drehung



Noch mehr Schwund

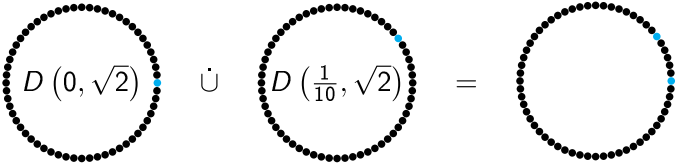
- disjunkte Vereinigung



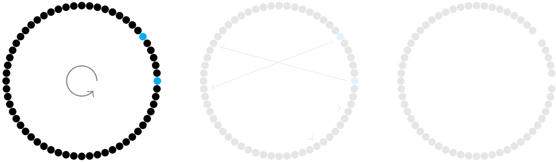
- Drehung

Noch mehr Schwund

- disjunkte Vereinigung

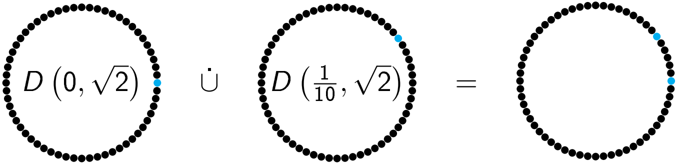


- Drehung

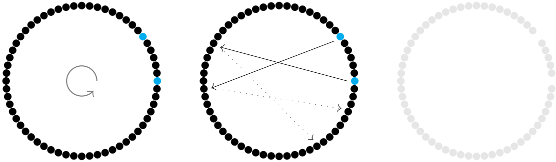


Noch mehr Schwund

- disjunkte Vereinigung

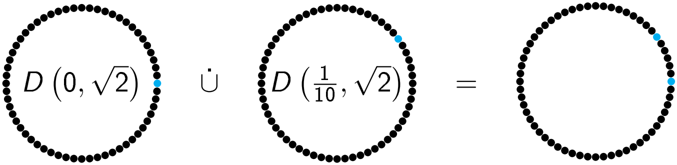


- Drehung

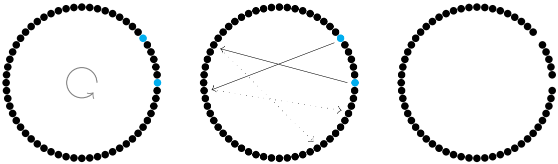


Noch mehr Schwund

- disjunkte Vereinigung

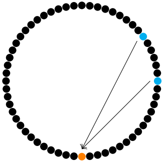


- Drehung



Disjunktheit sicherstellen

- Annahme: $D(x, \sqrt{2})$ und $D(y, \sqrt{2})$ nicht disjunkt



$$x + m\sqrt{2} \equiv y + n\sqrt{2} \qquad m, n \in \mathbb{N}_0$$

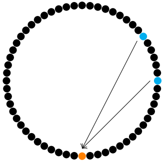
$$x + m\sqrt{2} = y + n\sqrt{2} + a \qquad a \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + (m - n)\sqrt{2} - a$$

- $\Rightarrow$ Annahme geht abzählbar ∞ oft schief
- Aber überabzählbar ∞ viele Punkte zur Auswahl!

Disjunktheit sicherstellen

- Annahme: $D(x, \sqrt{2})$ und $D(y, \sqrt{2})$ nicht disjunkt



$$x + m\sqrt{2} \equiv y + n\sqrt{2} \qquad m, n \in \mathbb{N}_0$$

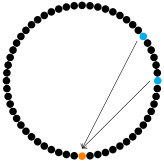
$$x + m\sqrt{2} = y + n\sqrt{2} + a \qquad a \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + (m - n)\sqrt{2} - a$$

- $\Rightarrow$ Annahme geht abzählbar ∞ oft schief
- Aber überabzählbar ∞ viele Punkte zur Auswahl!

Disjunktheit sicherstellen

- Annahme: $D(x, \sqrt{2})$ und $D(y, \sqrt{2})$ nicht disjunkt



$$x + m\sqrt{2} \equiv y + n\sqrt{2} \qquad m, n \in \mathbb{N}_0$$

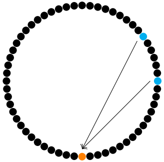
$$x + m\sqrt{2} = y + n\sqrt{2} + a \qquad a \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + (m - n)\sqrt{2} - a$$

- $\Rightarrow$ Annahme geht abzählbar ∞ oft schief
- Aber überabzählbar ∞ viele Punkte zur Auswahl!

Disjunktheit sicherstellen

- Annahme: $D(x, \sqrt{2})$ und $D(y, \sqrt{2})$ nicht disjunkt



$$x + m\sqrt{2} \equiv y + n\sqrt{2} \qquad m, n \in \mathbb{N}_0$$

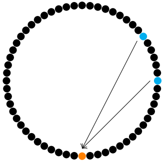
$$x + m\sqrt{2} = y + n\sqrt{2} + a \qquad a \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + (m - n)\sqrt{2} - a$$

- $\Rightarrow$ Annahme geht abzählbar ∞ oft schief
- Aber überabzählbar ∞ viele Punkte zur Auswahl!

Disjunktheit sicherstellen

- Annahme: $D(x, \sqrt{2})$ und $D(y, \sqrt{2})$ nicht disjunkt



$$x + m\sqrt{2} \equiv y + n\sqrt{2} \qquad m, n \in \mathbb{N}_0$$

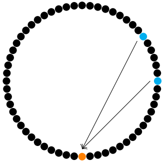
$$x + m\sqrt{2} = y + n\sqrt{2} + a \qquad a \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + (m - n)\sqrt{2} - a$$

- $\Rightarrow$ Annahme geht abzählbar ∞ oft schief
- Aber überabzählbar ∞ viele Punkte zur Auswahl!

Disjunktheit sicherstellen

- Annahme: $D(x, \sqrt{2})$ und $D(y, \sqrt{2})$ nicht disjunkt



$$x + m\sqrt{2} \equiv y + n\sqrt{2} \qquad m, n \in \mathbb{N}_0$$

$$x + m\sqrt{2} = y + n\sqrt{2} + a \qquad a \in \mathbb{Z}$$

$$y = x + (m-n)\sqrt{2} - a$$

- $\Rightarrow$ Annahme geht abzählbar ∞ oft schief
- Aber überabzählbar ∞ viele Punkte zur Auswahl!

Richtig viel Schwund

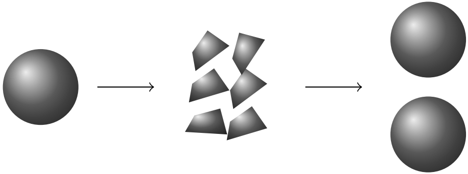
- Induktion $\rightarrow$ abzählbar ∞ viele Punkte
- Auswahlaxiom $\rightarrow$ überabzählbar ∞ viele Punkte
- „Paradoxon“ von Banach-Tarski

Richtig viel Schwund

- Induktion $\to$ abzählbar ∞ viele Punkte
- Auswahlaxiom $\to$ überabzählbar ∞ viele Punkte
- „Paradoxon“ von Banach-Tarski

Richtig viel Schwund

- Induktion $\rightarrow$ abzählbar ∞ viele Punkte
- Auswahlaxiom $\rightarrow$ überabzählbar ∞ viele Punkte
- „Paradoxon" von Banach-Tarski



Übersicht

Eine größte natürliche Zahl?

Bekannt:

$$0{,}9999\ldots = 1{,}0000\ldots$$

Eine größte natürliche Zahl?

Aber was ist das hier?

$\ldots 9999{,}0$

Rechnen mit Riesenzahlen

$$\begin{aligned}
\ldots 9999{,}0 + 1 &= \ldots 0000{,}0 \\
\ldots 9999{,}0 - 1 &= \ldots 9998{,}0 \\
\ldots 9999{,}0 \cdot 2 &= \ldots 9998{,}0 \\
\ldots 9999{,}0^2 &= \ldots 0001{,}0
\end{aligned}$$

Rechnen mit Riesenzahlen

$$\begin{aligned}
\dots 9999{,}0 + 1 &= \dots 0000{,}0 \\
\dots 9999{,}0 - 1 &= \dots 9998{,}0 \\
\dots 9999{,}0 \cdot 2 &= \dots 9998{,}0 \\
\dots 9999{,}0^2 &= \dots 0001{,}0
\end{aligned}$$

$$x + 1 = 0$$

$$x - 1 = 2 \cdot x$$

$$x^2 = 1$$

Rechnen mit Riesenzahlen

$$\begin{aligned} \ldots 9999{,}0 + 1 &= \ldots 0000{,}0 \\ \ldots 9999{,}0 - 1 &= \ldots 9998{,}0 \\ \ldots 9999{,}0 \cdot 2 &= \ldots 9998{,}0 \\ \ldots 9999{,}0^2 &= \ldots 0001{,}0 \end{aligned}$$

$$x + 1 = 0$$

$$x - 1 = 2 \cdot x$$

$$x^2 = 1$$

$$\Rightarrow x = -1$$

Alternativer Rechenweg

$$
\begin{aligned}
x &= \ldots 9999 \\
x &= 9 + 90 + 900 + 9000 + \cdots \\
10x &= 90 + 900 + 9000 + 90000 + \cdots \\
x - 10x &= 9 \\
x &= -1
\end{aligned}
$$

Der projektive Limes

$$\mathbb{Z}_{10} = \varprojlim_{n} \mathbb{Z}/10^n\mathbb{Z}$$

(projektiver Limes)

Problem: Division
$\to$ p-adische Zahlen

Der projektive Limes

$$\mathbb{Z}_{10} = \varprojlim_{n} \mathbb{Z}/10^n\mathbb{Z}$$

(projektiver Limes)

Problem: Division
$\rightarrow$ p-adische Zahlen

Übersicht

Die Aufgabe

Wir spielen „Die Siedler von Catan“.
Doch statt der beiden Würfel nehmen wir ...

Die Aufgabe

Wir spielen „Die Siedler von Catan“.
Doch statt der beiden Würfel nehmen wir ...

- einen 11-Flächner, nummeriert mit $2, \ldots, 12$

Die Aufgabe

Wir spielen „Die Siedler von Catan".
Doch statt der beiden Würfel nehmen wir ...

- einen 11-Flächner, nummeriert mit $2, \ldots, 12$
- einen 36-Flächner, nummeriert mit
  $2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, \ldots, 10, 11, 11, 12$

Die Aufgabe

Wir spielen „Die Siedler von Catan“.
Doch statt der beiden Würfel nehmen wir ...

- einen 11-Flächner, nummeriert mit $2, \ldots, 12$
- einen 36-Flächner, nummeriert mit $2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, \ldots, 10, 11, 11, 12$
- ein anders nummeriertes Paar von Würfeln

Die Aufgabe

Wir spielen „Die Siedler von Catan“.
Doch statt der beiden Würfel nehmen wir ...

- einen 11-Flächner, nummeriert mit $2, \ldots, 12$
- einen 36-Flächner, nummeriert mit $2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, \ldots, 10, 11, 11, 12$
- ein anders nummeriertes Paar von Würfeln
- ein anders nummeriertes Paar von Würfeln, deren Nummern mit 1 beginnen

Grundwissen Polynome

- Definition
- Operationen: $+, -, \cdot, /, ()$
- Faktorisierung
- Rekonstruktion von Koeffizienten

Grundwissen Polynome

- Definition
- Operationen: $+, -, \cdot, /, ()$
- Faktorisierung
- Rekonstruktion von Koeffizienten

Grundwissen Polynome

- Definition
- Operationen: $+, -, \cdot, /, ()$
- Faktorisierung
- Rekonstruktion von Koeffizienten

Grundwissen Polynome

- Definition
- Operationen: $+, -, \cdot, /, ()$
- Faktorisierung
- Rekonstruktion von Koeffizienten

Zwischenrechnungen

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2$$
$$= x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots + 2x^{11} + x^{12}$$

Zwischenrechnungen

$$\begin{aligned}&(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 \\ &\quad = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \ldots + 2x^{11} + x^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 &= x \cdot (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5) \\ &= x \cdot (1 + x) \cdot (1 + x^2 + x^4) \\ &= x \cdot (1 + x) \cdot (1 + x + x^2) \cdot (1 - x + x^2)\end{aligned}$$

Zwischenrechnungen

$$\begin{aligned}(x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^2\\ &= x^2+2x^3+3x^4+\ldots+2x^{11}+x^{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^1+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 &= x\cdot(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)\\ &= x\cdot(1+x)\cdot(1+x^2+x^4)\\ &= x\cdot(1+x)\cdot(1+x+x^2)\cdot(1-x+x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^2+2x^3+3x^4+\ldots+2x^{11}+x^{12}\\ &= x^2\cdot(1+x)^2\cdot\left(1+x+x^2\right)^2\cdot\left(1-x+x^2\right)^2\end{aligned}$$

Normale Aufteilung

- Erster Würfel

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2) \\
& = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\
& \cong (1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

- Zweiter Würfel

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2) \\
& = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\
& \cong (1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

Normale Aufteilung

- Erster Würfel

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2) \\
&= x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\
&\cong (1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

- Zweiter Würfel

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2) \\
&= x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\
&\cong (1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

Normale Aufteilung

- Erster Würfel

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2) \\
& = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\
& \cong (1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

- Zweiter Würfel

$$
\begin{aligned}
& x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2) \\
& = x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\
& \cong (1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

Normale Aufteilung

- Erster Würfel

$$\begin{aligned} & x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2) \\ &= x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\ &\cong (1,2,3,4,5,6) \end{aligned}$$

- Zweiter Würfel

$$\begin{aligned} & x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot (1-x+x^2) \\ &= x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 \\ &\cong (1,2,3,4,5,6) \end{aligned}$$

Alternative Aufteilung

- Erster Würfel

$$\begin{aligned} & x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \\ &= x^1 + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \\ &\cong (1,2,2,3,3,4) \end{aligned}$$

- Zweiter Würfel

$$\begin{aligned} & x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot \left(1-x+x^2\right)^2 \\ &= x^1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \\ &\cong (1,3,4,5,6,8) \end{aligned}$$

Alternative Aufteilung

- Erster Würfel

$$\begin{aligned} & x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \\ & = x^1 + 2x^2 + 2x^3 + x^4 \\ & \cong (1,2,2,3,3,4) \end{aligned}$$

- Zweiter Würfel

$$\begin{aligned} & x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot \left(1-x+x^2\right)^2 \\ & = x^1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8 \\ & \cong (1,3,4,5,6,8) \end{aligned}$$

Alternative Aufteilung

- Erster Würfel

$$x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2)$$
$$= x^1 + 2x^2 + 2x^3 + x^4$$
$$\cong (1,2,2,3,3,4)$$

- Zweiter Würfel

$$x \cdot (1+x) \cdot (1+x+x^2) \cdot \left(1-x+x^2\right)^2$$
$$= x^1 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^8$$
$$\cong (1,3,4,5,6,8)$$

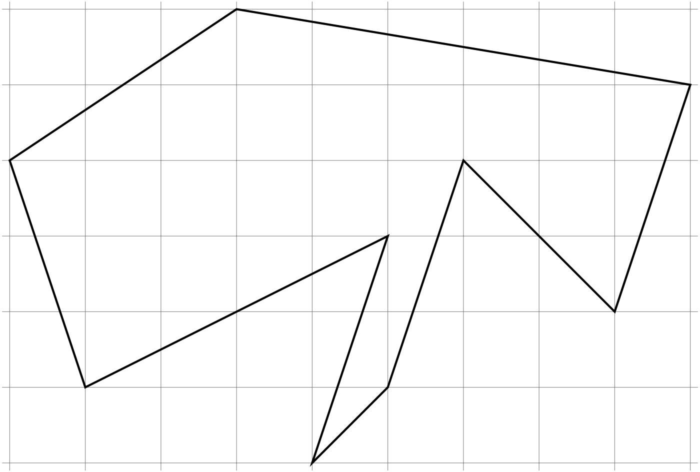
Übersicht

Merkwürdige Aufhängung eines Gemäldes

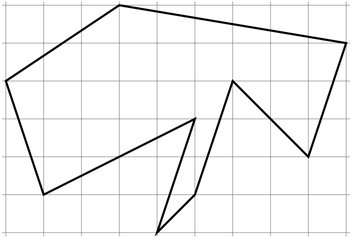
Kann man ein Bild so an zwei Nägeln aufhängen, dass es herunterfällt, egal welcher der Nägel bricht?

Übersicht

Ein Gitterpolygon



Zählen im Gitterpolygon



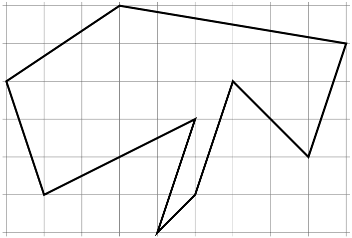
i = Anzahl der Punkte im Inneren

r = Anzahl der Punkte auf dem Rand

$$A = i + \frac{r}{2} - 1$$

(Satz von Pick)

Zählen im Gitterpolygon



i = Anzahl der Punkte im Inneren

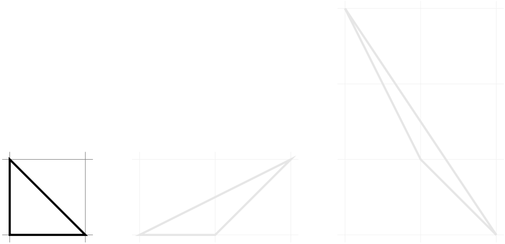
r = Anzahl der Punkte auf dem Rand

$$A = i + \frac{r}{2} - 1$$

(Satz von Pick)

Beweisidee: Mini-Dreiecke

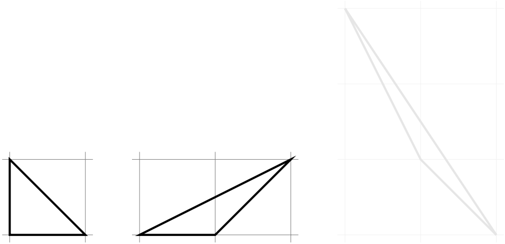
Beweis (1)



Für jedes Mini-Dreieck gilt: A ist Vielfaches von $\frac{1}{2}$.

$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2}$$

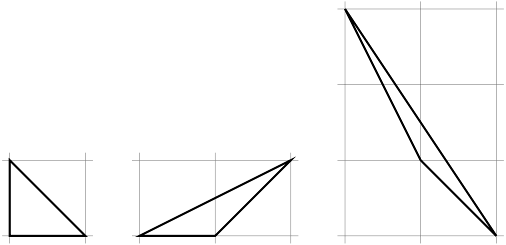
Beweis (1)



Für jedes Mini-Dreieck gilt: A ist Vielfaches von $\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2}$

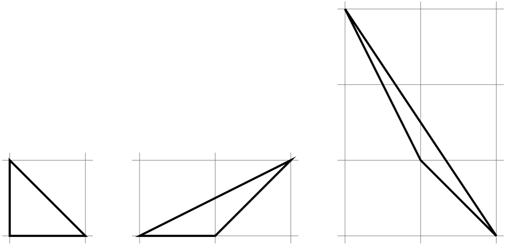
Beweis (1)



Für jedes Mini-Dreieck gilt: A ist Vielfaches von $\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2}$

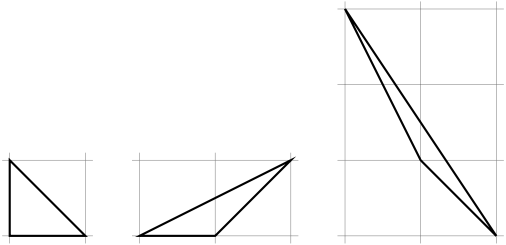
Beweis (1)



Für jedes Mini-Dreieck gilt: A ist Vielfaches von $\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2}$

Beweis (1)



Für jedes Mini-Dreieck gilt: A ist Vielfaches von $\frac{1}{2}$.

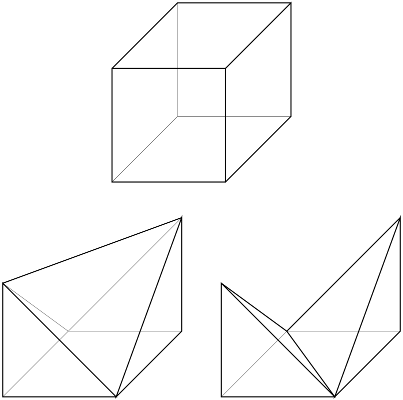
$$\Rightarrow A \geq \frac{1}{2}$$

Wiederholung Innenwinkelsumme

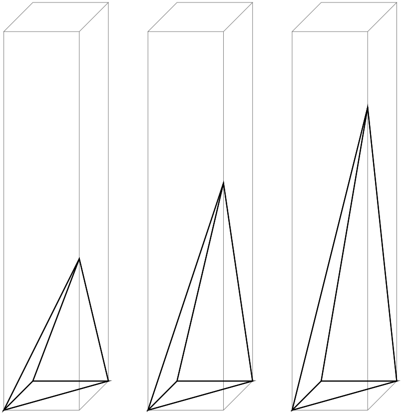
Beweis (2)

Beweis (3)

Probleme in 3D: Konvex / Konkav



Probleme in 3D: Reeve-Tetraeder



Reeve-Tetraeder

Übersicht

Jedes Dreieck ist gleichschenklig

Übersicht

Der Babier

Der Barbier rasiert jeden, der sich nicht selbst rasiert.

Der Babier

Der Barbier rasiert jeden, der sich nicht selbst rasiert.

Rasiert der Barbier sich selbst?

Der Babier

Der Barbier rasiert jeden, der sich nicht selbst rasiert.

Rasiert der Barbier sich selbst?

- „ungefährliches“ Paradoxon

Der Babier

Der Barbier rasiert jeden, der sich nicht selbst rasiert.

Rasiert der Barbier sich selbst?

- „ungefährliches" Paradoxon
- Bauanleitung für Widerspruchs-Beweise

Der Babier

...

Übersicht

142857 und andere Perioden

Übersicht

Der Platz für die Katze

Mathematische Spielereien

Volker Grabsch

http://profv.de/ms