

Minoren

(Seminar Matroidtheorie)

Volker Grabsch

3. März 2008

Zusammenfassung

In meinem Vortrag geht es um Minoren in der Matroidtheorie.

Zunächst werden zwei neue Operationen auf Matroiden eingeführt, das *Löschen* und das *Zusammenziehen*. Ähnlich der Dualisierung haben sie sehr angenehme Eigenschaften, was ihre Hintereinanderausführung betrifft.

Mit ihrer Hilfe können wir dann *Minoren* definieren. Wir schauen uns wesentliche Eigenschaften an und werden u.a. feststellen, dass Minoren fast immer zur selben Klasse gehören wie ihr Ursprungs-Matroid. Das nennt man *Abgeschlossenheit*.

Doch was nützt uns diese Minor-Abgeschlossenheit? Was ist daran so wichtig? Diese Frage klärt ein kleiner Ausblick: Mit Hilfe von *verbotenen Minoren* können wir unsere Matroid-Klassen sehr geschickt beschreiben.

Die neuen Begriffe und Zusammenhänge werden an zahlreichen Beispielen illustriert.

Inhaltsverzeichnis

1	Kleines Wörterbuch	2
2	Einleitung	2
3	Verkleinerungs-Operationen	3
	Löschen von Knoten	3
	Löschen und Zusammenziehen von Kanten	3
4	Wichtige Eigenschaften	6
	Wirkung auf Matrizen	6
	Wirkung auf uniforme Matroide	8
	Hintereinanderausführung	8
	Basen und Kreise	10
	Dualität	10
5	Minoren	10
	Abgeschlossenheit	11
	Ausblick: Verbotene Minoren	11

1 Kleines Wörterbuch

Da es über die Matroidtheorie fast nur englischsprachige Literatur gibt, haben viele Fachbegriffe keine offizielle deutsche Übersetzung. Hier sind die Übersetzungen, die ich verwende:

englisch	deutsch
matroid	Matroid
independent set	unabhängige Menge
base	Basis
circuit	Kreis
representation	Darstellung
duality	Dualität
deletion	Löschung
contraction	Zusammenziehung
minor	Minor
proper minor	echter Minor
minor-closed	minor-abgeschlossen
excluded minor	verbotener Minor

2 Einleitung

Heute wollen wir Matroide verkleinern.

Kein Problem: Wir schnappen uns einen Matroiden $M = (E, \mathcal{I})$, und werfen ein paar Elemente aus E heraus. Zusätzlich verkleinern wir einige unabhängige Mengen, oder streichen gleich ganze Mengen aus \mathcal{I} heraus:

$$\begin{aligned}M &= (E, \mathcal{I}) \\E &= \{a, b, c\} \\ \mathcal{I} &= \left\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\} \right\}\end{aligned}$$

Halt! Sind dann noch unsere Axiome (I1) – (I3) erfüllt? Und was ist mit den unabhängigen Mengen aus \mathcal{I} , die noch alte Elemente enthalten?

$$\begin{aligned}M &= (E, \mathcal{I}) \\E &= \{a, b\} \\ \mathcal{I} &= \left\{ \emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a\} \right\}\end{aligned}$$

Ganz so einfach ist es also nicht.

Wir könnten nun systematisch alle denkbaren Verkleinerungen erforschen, bei denen als Ergebnis wieder ein Matroid herauskommt. Danach müssten wir untersuchen, wie diese Operationen konkret bei Graphen und Matrizen aussehen.

Sinnvoller erscheint jedoch der umgekehrte Weg: Wir schauen uns zuerst an, wie man Graphen verkleinert, und verallgemeinern es dann auf Matroide. So wissen wir schon, wie die Operationen auf Graphen aussehen, und brauchen nur noch ihre Wirkung auf Matrizen untersuchen.

Diese Strategie kommt uns bekannt vor, bei der Dualisierung sind wir genauso vorgegangen.

3 Verkleinerungs-Operationen

Graphen verkleinert man schrittweise. Dabei gibt es 3 elementare Operationen:

- Knoten löschen
- Kanten löschen
- Kanten zusammenziehen

Am liebsten würden wir alle drei Operationen auf Matroide verallgemeinern. Schauen wir mal, ob das geht.

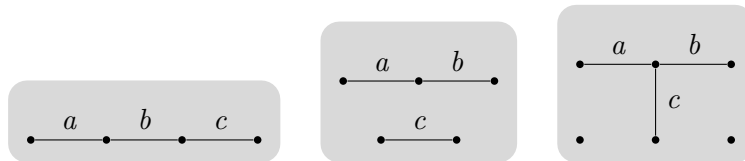
Löschen von Knoten

Das Löschen von Knoten ist leider nicht verallgemeinerbar. Denn dazu müssten wir in einem Matroid zumindest Knoten *benennen* können.

Beispiel 3.1 Nehmen wir folgenden Matroiden.¹

$$\begin{aligned}
 M &= (E, \mathcal{I}) \\
 E &= \{a, b, c\} \\
 \mathcal{I} &= \left\{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} \right\}
 \end{aligned}$$

Er wird u.a. durch folgende Graphen dargestellt:



Sie haben eine unterschiedliche Anzahl von Knoten, und die Knoten haben völlig unterschiedliche Grade. Wenn wir auf M so etwas wie „Knoten“ definieren wollen, auf welchen dieser Graphen sollten wir uns dann beziehen?

Dieses Beispiel macht klar, dass es auf der Ebene der Matroide so etwas wie „Knoten“ einfach nicht mehr gibt.

Löschen und Zusammenziehen von Kanten

Beim Löschen und Zusammenziehen von Kanten sieht es schon besser aus. Wiederholen wir zunächst, wie diese Operationen auf Graphen definiert sind:

Definition 3.2 Unter der Löschung

$$G \setminus e$$

einer Kante e aus einem Graphen G verstehen wir einen neuen Graphen, der die selben Knoten besitzt und alle Kanten bis auf e .

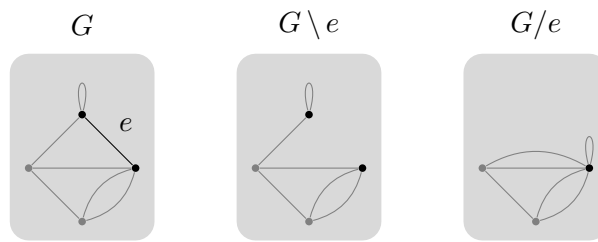
Definition 3.3 Unter der Zusammenziehung

$$G/e$$

einer Kante e in einem Graphen G verstehen wir eine Löschung von e mit nachfolgender Identifikation der Endknoten von e .

¹Es ist ein uniformer Matroid, $M \cong U_{3,3}$.

Beispiel 3.4 *Löschung und Zusammenziehung einer Kante in unserem Standard-Graphen:*

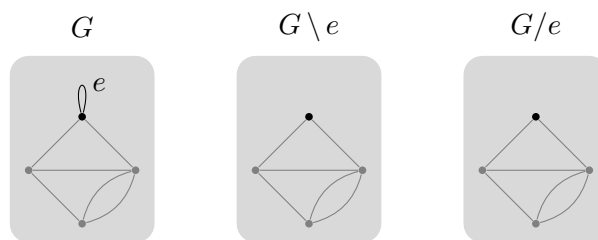


Satz 3.5 *Ist e eine Schlaufe in G , so sind Löschung und Zusammenziehung gleichbedeutend:*

$$G \setminus e = G/e$$

Beweis Nach Definition 3.2 und 3.3 unterscheiden sich Löschung und Zusammenziehung nur durch die nachfolgende Identifikation der Endknoten. Bei einer Schlaufe sind die Endknoten aber schon identisch. ■

Beispiel 3.6 *Löschung und Zusammenziehung einer Schlaufe:*



Nachdem wir uns wieder klar gemacht haben, was Löschung und Zusammenziehung auf Graphen bedeuten, wollen wir sie auf Matroiden verallgemeinern. Dazu muss es uns gelingen, diese Operationen ausschließlich durch *Elemente* und *unabhängige Mengen* zu beschreiben, d.h. durch Kanten und kreisfreie Teilgraphen.

Satz 3.7 *Sei G ein Graph, e eine Kante und X eine Teilmenge der Kanten von G . Dann gilt:*

- (i) X ist kreisfreier Teilgraph in $G \setminus e$
 $\Leftrightarrow e \notin X$ und X ist kreisfreier Teilgraph in G
- (ii) X ist kreisfreier Teilgraph in G/e und e ist keine Schlaufe
 $\Leftrightarrow e \notin X$ und $X \cup \{e\}$ ist kreisfreier Teilgraph in G

Beweis

- (i), \Rightarrow Sei X ein kreisfreier Teilgraph in $G \setminus e$. Dann ist X nach Definition ein Teilgraph von G und es gilt: $e \notin X$. Da X in $G \setminus e$ kreisfrei ist, muss X auch in G kreisfrei sein, da die Elemente von X nach wie vor die selben Kanten darstellen. ■
- (i), \Leftarrow Sei X ein kreisfreier Teilgraph in G mit $e \notin X$. Dann ist X nach Definition auch ein Teilgraph von $G \setminus e$. Bezüglich $G \setminus e$ muss X weiterhin kreisfrei sein, da die Elemente von X nach wie vor die selben Kanten darstellen. ■

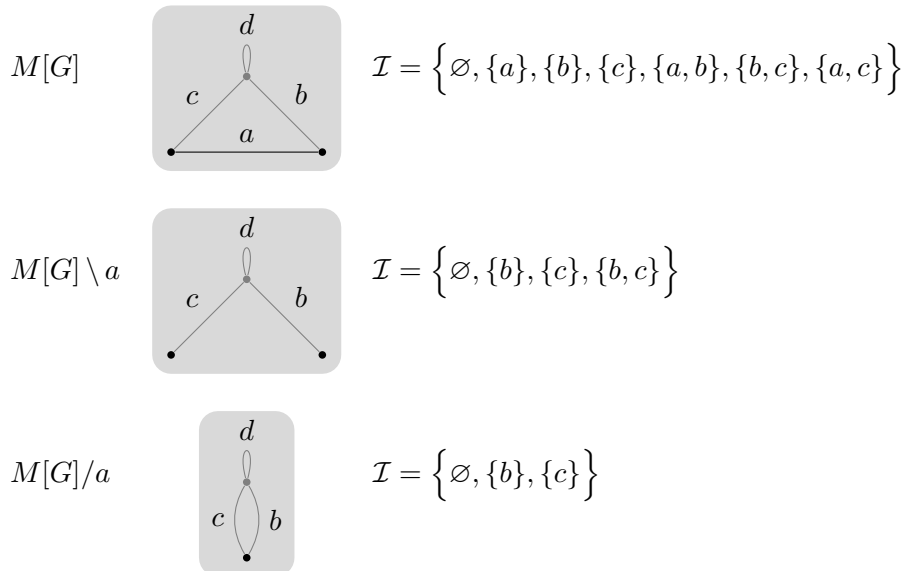
(ii), \Rightarrow Sei X ein kreisfreier Teilgraph in G/e und e keine Schlaufe. Dann ist X nach Definition ein Teilgraph von G und es gilt: $e \notin X$.

Angenommen, $X \cup \{e\}$ hätte einen Kreis in G . Entfernen wir die Kante e und identifizieren stattdessen die Endpunkte von e , bleibt der Kreis weiterhin geschlossen, egal ob er durch e ging oder nicht. Damit haben wir aber einen Kreis in X bezüglich G/e gefunden, im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist die Annahme falsch, d.h. $X \cup \{e\}$ ist kreisfreier Teilgraph von G . ■

(ii), \Leftarrow Sei $X \cup \{e\}$ ein kreisfreier Teilgraph in G und $e \notin X$. Dann ist X nach Definition auch ein Teilgraph von G/e . Weil $X \cup \{e\}$ in G kreisfrei ist, muss insbesondere $\{e\}$ kreisfrei sein, d.h. e ist keine Schlaufe.

Angenommen, X hätte einen Kreis in G/e . In G/e sind die Endpunkte von e miteinander identifiziert worden. Wenn wir diese „auftrennen“, unterbrechen wir eventuell den Kreis. Fügen wir e jedoch dem Teilgraphen hinzu, ist der Kreis wieder geschlossen. Somit haben wir einen Kreis in $X \cup \{e\}$ bezüglich G gefunden, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die Annahme falsch, d.h. X ist kreisfreier Teilgraph in G/e . ■

Beispiel 3.8 *Löschung und Zusammenziehung einer Kante im Graphen und im zugehörigen Matroid:*



Na also! Nun haben wir eine allgemeine Formulierung für Matroide gefunden: Beim Löschen von e werden alle unabhängigen Mengen gestrichen, in denen e auftaucht. Beim Zusammenziehen von e werden zusätzlich alle unabhängigen Mengen gestrichen, zu denen e nicht hinzugefügt werden kann.

Wir müssen jedoch aufpassen, wenn e eine Schlaufe ist ($\{e\} \notin \mathcal{I}$). In dem Fall können wir e nicht auf die beschriebene Weise zusammenziehen, denn dort gilt der Teil (ii) des vorherigen Satzes gar nicht.² Wir müssen die Zusammenziehung einer Schlaufe also anders beschreiben. Am einfachsten geht das mit Hilfe von Satz 3.5: Wir definieren die Zusammenziehung einer Schlaufe einfach durch ihre Löschung.

²Er kann auch gar nicht gelten, denn für eine Schlaufe e ist $X \cup \{e\}$ niemals kreisfrei, d.h. dem Satz zufolge hätte G/e gar keine kreisfreien Teilgraphen, nicht einmal den leeren Teilgraph $X = \emptyset$.

Definition 3.9 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $e \in E$.

Löschen von e :

$$M \setminus e := (E', \mathcal{I}') \text{ mit } E' := E \setminus \{e\}$$

$$\mathcal{I}' := \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X\}$$

Zusammenziehen von e :

$$M/e := (E', \mathcal{I}') \text{ mit } E' := E \setminus \{e\}$$

$$\mathcal{I}' := \begin{cases} \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X\} & \text{falls } \{e\} \notin \mathcal{I} \\ \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}\} & \text{falls } \{e\} \in \mathcal{I} \end{cases}$$

Zum Schluss dieses Kapitels formulieren wir noch einige Sätze, die uns bestätigen, dass Definition 3.9 genau das liefert, was wir haben wollen.

Satz 3.10 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $e \in E$. Dann sind $M \setminus e$ und M/e wiederum Matroide.

Beweis (ausgelassen) ■

Satz 3.11 Die Matroid-Operationen Löschen und Zusammenziehen sind Verallgemeinerungen der entsprechenden Graph-Operationen. Das heißt, es gilt:

$$M(G) \setminus e = M(G \setminus e)$$

$$M(G)/e = M(G/e)$$

für alle Graphen G und Kanten e .

Beweis Dieser Satz ist nur eine Umformulierung von Satz 3.7. ■

4 Wichtige Eigenschaften

Im vorherigen Kapitel haben wir zwei neue Operationen eingeführt, die Löschung und die Zusammenziehung. Schauen wir uns nun einige wichtige Eigenschaften an.

Wirkung auf Matrizen

Wie das Löschen und Zusammenziehen auf Graphen aussieht, wissen wir bereits. Schließlich haben wir sie gerade so konstruiert, dass sie dort mit den entsprechenden elementaren Graphen-Operationen übereinstimmen.

Doch was passiert mit einem Matroid, der durch eine \mathbb{F} -Matrix dargestellt wird? Sind die Matroide, die man nach dem Löschen bzw. Zusammenziehen erhält, überhaupt noch durch eine \mathbb{F} -Matrix darstellbar?

Die Antwort ist *ja* und die neue Matrix ist nicht einmal besonders kompliziert. Die Löschung entspricht dem Streichen einer Spalte, und die Zusammenziehung entspricht dem Eliminations-Schritt im Gauß-Algorithmus.

Satz 4.1 Sei A eine Matrix über dem Körper \mathbb{F} .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A' entstehe aus A durch Herausstreichen der i -ten Spalte:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$M[A'] = M[A] \setminus i$$

Beweis (ausgelassen) ■

Satz 4.2 Sei A eine Matrix über dem Körper \mathbb{F} . Sei die i -te Spalte keine Nullspalte (d.h. i ist keine Schlaufe in $M[A]$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & a_{1i} & a_{1,i+1} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2i} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{ni} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A' entstehe aus A durch äquivalente Umformungen (ohne Spaltenvertauschungen!)

derart, dass die i -te Spalte zum Einheitsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ wird:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & 1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & 0 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & 0 & a_{n,i+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

A'' entstehe aus A' durch Streichen der ersten Zeile und der i -ten Spalte:

$$A'' = \begin{pmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Dann gilt:

$$M[A''] = M[A]/i$$

Beweis (ausgelassen) ■

Beispiel 4.3 Wir wollen die 4. Spalte der folgenden Matrix zusammenziehen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Spalte können wir leicht in einen Einheitsvektor umformen. Wir brauchen in der Matrix nur die 1. Zeile auf die 3. Zeile zu addieren:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zum Schluss streichen wir die 1. Zeile und die 4. Spalte:

$$A'' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wirkung auf uniforme Matroide

Wie bei den Matrizen stellt sich auch bei den uniformen Matroiden die Frage, wie ihre Verkleinerungen im Einzelnen aussehen, und ob dabei überhaupt noch uniforme Matroide herauskommen. Auch hier lautet die Antwort *ja* und alles ist schön einfach.

Satz 4.4 Sei $U_{r,n}$ ein uniformer Matroid und e ein Element aus $U_{r,n}$, so gilt:

$$U_{r,n} \setminus e \cong \begin{cases} U_{r,n-1} & \text{falls } r < n \\ U_{r-1,n-1} & \text{falls } r = n \end{cases}$$

$$U_{r,n}/e \cong \begin{cases} U_{r-1,n-1} & \text{falls } r > 0 \\ U_{r,n-1} & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

Beweis (ausgelassen) ■

Hintereinanderausführung

Es ist egal, in welcher Reihenfolge wir einen Matroiden verkleinern.

Satz 4.5 Sei M ein Matroid und e, f zwei verschiedene Elemente von M , so gilt:

(i) Die Lösch-Reihenfolge ist egal:

$$(M \setminus e) \setminus f = (M \setminus f) \setminus e$$

(ii) Die Zusammenzieh-Reihenfolge ist egal:

$$(M/e)/f = (M/f)/e$$

(iii) Es ist egal, ob zuerst gelöscht oder zuerst zusammengezogen wird:

$$(M \setminus e)/f = (M/f) \setminus e$$

Beweis Sei $M = (E, \mathcal{I})$ und $e, f \in E$ mit $e \neq f$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} (M \setminus e) \setminus f &= ((E, \mathcal{I}) \setminus e) \setminus f \\ &= (E \setminus \{e\}, \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X\}) \setminus f \\ &= (E \setminus \{e, f\}, \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X, f \notin X\}) \\ &= (E \setminus \{f\}, \{X \in \mathcal{I} \mid f \notin X\}) \setminus e \\ &= (M \setminus f) \setminus e \end{aligned}$$

Damit ist (i) gezeigt. ■

Ist f eine Schlaufe, können wir (iii) auf (i) zurückführen:

$$(M \setminus e)/f = (M \setminus e) \setminus f = (M \setminus f) \setminus e = (M/f) \setminus e$$

Ist f hingegen keine Schlaufe, so gilt:

$$\begin{aligned} (M \setminus e)/f &= ((E, \mathcal{I}) \setminus e)/f \\ &= (E \setminus \{e\}, \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X\})/f \\ &= (E \setminus \{e, f\}, \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X, f \notin X, X \cup \{f\} \in \mathcal{I}\}) \\ &= (E \setminus \{f\}, \{X \in \mathcal{I} \mid f \notin X, X \cup \{f\} \in \mathcal{I}\}) \setminus e \\ &= (M/f) \setminus e \end{aligned}$$

Damit ist (iii) gezeigt. ■

Ist e eine Schleufe, können wir (ii) auf (iii) zurückführen:

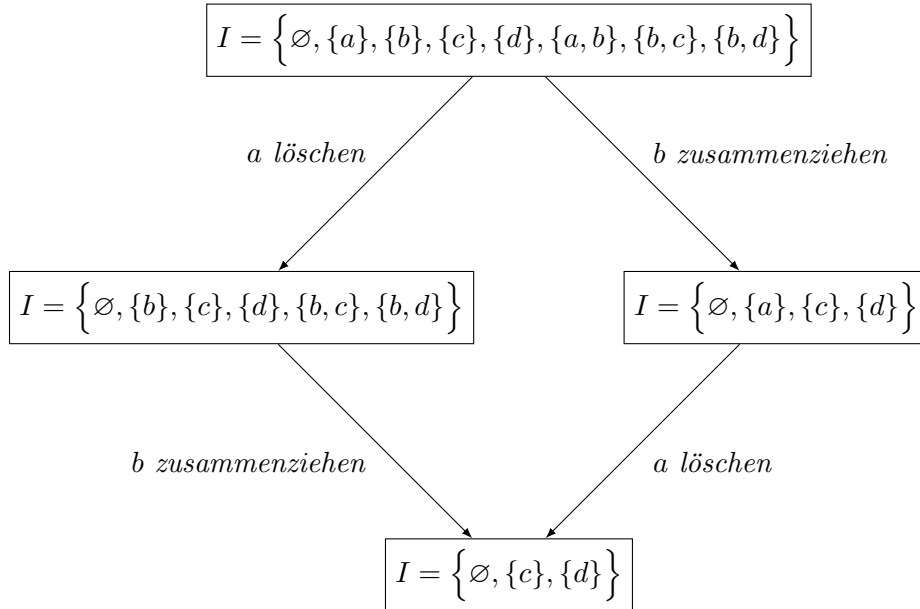
$$(M/e)/f = (M \setminus e)/f = (M/f) \setminus e = (M/f)/e$$

Anderenfalls gilt:

$$\begin{aligned} (M/e)/f &= ((E, \mathcal{I})/e)/f \\ &= (E \setminus \{e\}, \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}\})/f \\ &= (E \setminus \{e, f\}, \{X \in \mathcal{I} \mid e \notin X, X \cup \{e\} \in \mathcal{I}, f \notin X, X \cup \{f\} \in \mathcal{I}\}) \\ &= (E \setminus \{f\}, \{X \in \mathcal{I} \mid f \notin X, X \cup \{f\} \in \mathcal{I}\})/e \\ &= (M/f)/e \end{aligned}$$

Damit ist (ii) gezeigt. ■

Beispiel 4.6 *Es ist egal, ob zuerst a gelöscht oder b zusammengezogen wird:*



Um die Verkleinerung eines Matroiden zu beschreiben, brauchen wir daher nur zu sagen, welche Elemente gelöscht und welche zusammengezogen werden. Die Reihenfolge ist egal. Dies rechtfertigt folgende Notation:

Definition 4.7 *Sei M ein Matroid und $X = \{x_1, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ zwei disjunkte Elementmengen. Dann ist*

$$M \setminus X/Y \quad := \quad M \setminus x_1 \setminus \dots \setminus x_m / y_1 / \dots / y_n$$

Analog werden $M/Y \setminus X$ und $M \setminus X$ und M/Y definiert.

Basen und Kreise

Schauen wir uns nun an, wie sich das Löschen und Zusammenziehen mehrerer Elemente auf die unabhängigen Mengen, Basen und Kreise eines Matroiden auswirken:

Satz 4.8 Sei M ein Matroid über E , und sei $T \subseteq E$. Dann ist $M \setminus T$ ein Matroid über $E \setminus T$, und für jede Elementmenge $X \subseteq E \setminus T$ gilt:

- (i) X ist unabhängig in $M \setminus T$
 $\Leftrightarrow X$ ist unabhängig in M .
- (ii) X ist ein Kreis von $M \setminus T$
 $\Leftrightarrow X$ ist ein Kreis von M .
- (iii) X ist eine Basis von $M \setminus T$
 $\Leftrightarrow X$ ist eine maximale Teilmenge von $E \setminus T$, die unabhängig in M ist.

Weiterhin ist M/T ein Matroid über $E \setminus T$, und für jedes $X \subseteq E \setminus T$ gilt:

- (iv) X ist unabhängig in M/T
 $\Leftrightarrow X \cup B_T$ ist unabhängig in M für eine maximale Teilmenge $B_T \subseteq T$, die unabhängig in M ist.
- (v) X ist ein Kreis von M/T
 $\Leftrightarrow X$ ist ein minimales nichtleeres Element von $\{C \setminus T \mid C \text{ ist ein Kreis von } M\}$.
- (vi) X ist eine Basis von M/T
 $\Leftrightarrow X \cup B_T$ ist eine Basis von M für eine maximale Teilmenge $B_T \subseteq T$, die unabhängig in M ist.

Beweis (ausgelassen) ■

Dualität

Im dualen Matroid vertauschen Löschung und Zusammenziehung ihre Rollen.

Satz 4.9 Sei $M = (E, \mathcal{I})$ ein Matroid und $e \in E$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} M^* \setminus e &= (M/e)^* \\ M^*/e &= (M \setminus e)^* \end{aligned}$$

Beweis (ausgelassen) ■

5 Minoren

Wir haben inzwischen schon viel mit Minoren gearbeitet. Es wird Zeit, das Kind beim Namen zu nennen:

Definition 5.1 Sei M ein Matroid. Ein Minor von M ist ein Matroid M' mit

$$M' = M \setminus X/Y$$

für gewisse Mengen X und Y von Elementen aus M .

M' ist ein echter Minor, wenn er eine echte Verkleinerung darstellt (d.h. $M \neq M'$ bzw. $X \cup Y \neq \emptyset$).

Man kann sich Minoren auch so vorstellen: Wir haben zwei Operationen, die einen Matroiden $M = (E, \mathcal{I})$ echt verkleinern. Wenden wir unsere Operationen $|E|$ -mal hintereinander an, so erhalten wir den leeren Matroid.³ Die Matroide, die wir auf dem Wege dorthin erhalten, nennen wir (echte) *Minoren*.

³Denn mit jeder Operation entfernen wir genau ein Element aus E .

Abgeschlossenheit

Bisher haben wir die Auswirkungen des Löschens und des Zusammenziehens für einzelne Matroide genauestens erforscht. Da wird es Zeit, sich das Gesamtbild anzusehen.

Wir betrachten ganze Klassen von Matroiden (uniforme, graphische, ...) und fragen uns, wo ihre Minoren liegen. Besonders praktisch wäre es, wenn die Minoren die jeweilige Klasse gar nicht verlassen. Genauer:

Definition 5.2 *Eine Klasse \mathcal{M} von Matroiden heißt minor-abgeschlossen, wenn die Minoren aller Matroide aus \mathcal{M} wieder in \mathcal{M} liegen.*

Satz 5.3 *Folgende Matroidklassen sind minor-abgeschlossen:*

- *uniforme Matroide*
- *graphische Matroide*
- *kographische Matroide*
- *\mathbb{F} -repräsentierbare Matroide*

Beweis Dieser Satz ist nur eine Zusammenfassung von Satz 4.4, Satz 3.11, Satz 4.9, Satz 4.1 und Satz 4.2. ■

Ausblick: Verbotene Minoren

Wir wissen nun, dass praktisch alle interessanten Matroidklassen minor-abgeschlossen sind. Aber hilft uns das, diese Klassen besser zu verstehen? Ja! Denn diese Eigenschaft ermöglicht die Untersuchung von verbotenen Minoren:

Definition 5.4 *Sei \mathcal{M} eine minor-abgeschlossene Matroidklasse. Ein verbotener Minor von \mathcal{M} ist ein minimaler Matroid außerhalb von \mathcal{M} . Das heißt, all seine echten Minoren liegen in \mathcal{M} , aber er selbst liegt nicht in \mathcal{M} .*

Verbotene Minoren sind gewissermaßen „Muster“, die verhindern, dass ein Matroid zu einer bestimmten Klasse gehört. Um festzustellen, ob ein bestimmter Matroid zu einer Klasse gehört, brauchen wir „nur“ schauen, ob er einen verbotenen Minor enthält.

Dieses Prinzip ist keineswegs neu. Wie kennen das schon aus der Graphentheorie:

Beispiel 5.5 *Um festzustellen, ob ein Graph zur Klasse der planaren Graphen gehört, können wir einerseits eine planare Darstellung suchen. Wir können aber auch einfach schauen, ob er einen $K_{3,3}$ oder K_5 als Teilgraph⁴ enthält. Denn $K_{3,3}$ und K_5 sind die kleinsten nicht-planaren Graphen.*

Diese Form der Untersuchung funktioniert natürlich nur, wenn wir *alle* verbotenen Minoren einer Matroidklasse kennen. Für manche Klassen sind sie sehr leicht zu bestimmen. Es gibt sogar Klassen, die nur einen einzigen verbotenen Minor haben. Doch es gibt auch Klassen, deren verbotene Minoren nur sehr schwer zu bestimmen sind. Für einige Klassen ist noch nicht einmal geklärt, ob sie endlich oder unendlich viele verbotene Minoren haben.

⁴Der Begriff „Teilgraph“ ist nicht ganz korrekt. Genauer gesagt man muss untersuchen, ob sich der Graph durch Zusammenziehen oder Löschen von Kanten bzw. Knoten in $K_{3,3}$ oder K_5 überführen lässt. (Satz von Kuratowski)

Literatur

- [Oxl91] OXLEY, JAMES: *What is a Matroid?* Mathematics Subject Classification, (05B35), 1991.